Matematyka na klawiszach

Kalkulatorowe oszustwa

Często w skomplikowanych rachunkach zdajemy się całkowicie na kalkulator. Wynik obliczony na kalkulatorze nosi znamiona w 100% pewnego. Czy to zaufanie, jakim darzymy kalkulator, nie jest trochę na wyrost?

Oczywiście łatwo może się zdarzyć, że to my pomylimy się przy wciskaniu klawiszy. Kalkulator pokaże wynik prawidłowy, ale nie taki, jakiego oczekiwaliśmy. Tu jednak wina leży po naszej stronie. Dlatego warto się kontrolować, zadać sobie pytanie, czy wynik jest prawdopodobny. Czy ma np. dobrą parzystość, czy rząd wyniku zgadza się z oczekiwaniami (wartością oszacowaną z grubsza). Czasem jednak wciskamy wszystkie klawisze prawidłowo, a kalkulator „szwankuje". Jak nie dać się oszukać?

Przykład 1

Naciskamy następujący ciąg klawiszy: 2 + 3 × 5. Kalkulator Małgosi pokazuje wynik 17. Kalkulator Jasia 25. Dlaczego kalkulatory pokazują co innego? Który „ma rację", a który „oszukuje"? Który wynik jest poprawny?

Odpowiedź

Oba kalkulatory działają poprawnie. Kalkulator Małgosi jest bardzo prosty. Nie „zna" zasad kolejności działań. Wykonuje rachunki w takiej kolejności, w jakiej je wprowadzamy. Większość kalkulatorów zna kolejność działań, ale dobrze przetestować swój kalkulator, aby nie dać się oszukać i właściwie wpisywać działania. Jak sobie radzić z takim kalkulatorem, jaki ma Małgosia? Wystarczy wpisywać działania w innej kolejności, użyć nawiasów lub wrzucać wyniki cząstkowe do pamięci.

Przykład 2

Naciskamy ciąg klawiszy: 2 √ x^2. Kalkulator Jasia pokazuje wynik 2. Kalkulator Małgosi 1,999998. Dlaczego kalkulatory pokazują co innego? Który „ma rację", a który „oszukuje"? Który wynik jest poprawny?

Odpowiedź

Operacje wyciągania pierwiastka i podnoszenia do kwadratu są wzajemnie odwrotne. Po ich kolejnym wykonaniu powinniśmy otrzymać wynik wyjściowy, czyli 2. Czy kalkulator Małgosi jest zepsuty? Nie. To on poprawnie wskazał wynik działania. Każdy kalkulator zapamiętuje liczby tylko w pewnym przybliżeniu. Także $\sqrt{2}$ nie jest pamiętany dokładnie. Kalkulator Małgosi może pamiętać mniej cyfr jego rozwinięcia, np. 1,414213. Po podniesieniu takiej liczby do kwadratu kalkulator Jasia również pokazałby 1,999998. A Twój? Wynik z kalkulatora Małgosi nie powinien więc nas wcale dziwić, ale dlaczego kalkulator Jasia pokazuje w takim razie 2?

Przy obliczaniu $\sqrt{2}$ podaje on co prawda wynik z większą dokładnością, niż kalkulator Małgosi, bowiem pokazuje 1,414213562, ale gdy wpiszemy mu właśnie taką liczbę i każemy podnieść do kwadratu, to poda 1,999999999. Dlaczego zatem w naszym przykładzie wskazał 2? Kalkulator może pamiętać liczby z większą dokładnością niż liczba cyfr wyświetlana na ekranie, a czasem, zapamiętując kilka ostatnich operacji, jest nawet w stanie rozpoznać działanie odwrotne.

Przykład 3

Chcemy obliczyć 13^{10}. Na kalkulatorze Małgosi nie ma klawisza potęgowania. Poradzi ona sobie inaczej. Naciska 1 3 × = = = = =... Wielokrotne naciskanie klawisza = powoduje powtórzenie wykonania ostatniego działania, w naszym przypadku mnożenia przez 13. Na ekranie pojawiają się kolejne potęgi 13.

Uwaga 1. W niektórych kalkulatorach, aby uzyskać ten efekt, trzeba klawisz działania nacisnąć dwukrotnie, w naszym przykładzie 1 3 × × = = = = =...

Uwaga 2. Ten sposób nie działa na kalkulatorach z klawiszem Ans – skrót od anielskiego słowa answer [czytaj *anser*] oznaczającego odpowiedź. Pod tym klawiszem pamiętany jest ostatni wynik uzyskany na wyświetlaczu. Na takim kalkulatorze wystarczy wpisać: 1 3 ENTER Ans × 1 3 ENTER i powtarzać naciskanie ENTER ENTER ENTER... Na ekranie pojawiają się kolejne potęgi 13.

Po 6-krotnym wciśnięciu = na kalkulatorze Małgosi pojawia się wynik 62748517. Nic dziwnego, to jest właśnie 13^7. Po jeszcze jednym wciśnięciu = otrzymujemy 8.1573072. Dalej już nic się nie dzieje. A przecież to niemożliwe, żeby ósma potęga 13 dawała liczbę mniejszą od 10. Czy kalkulator Małgosi się zepsuł?

Kalkulator Jasia ma klawisz potęgowania. Wystarczy na nim wcisnąć klawisze 1 3 ∧ 7, aby otrzymać wynik taki sam, jak u Małgosi. Ale kiedy wciśniemy 1 3 ∧ 1 0, otrzymujemy 1.378584918 E11. Taki zapis nazywamy wykładniczym (ang. exponential [czytaj *eksponenszyl*] – stąd litera E na wyświetlaczu) i oznacza on $1{,}378584918 \cdot 10^{11}$, czyli w liczbie (zawsze jednocyfrowej!) napisanej przed E wystarczy przesunąć przecinek w prawo tyle razy, ile wskazuje liczba za E. Ale w takim razie (wg kalkulatora Jasia) potęga 13 kończyłaby się dwoma zerami. Przecież to niemożliwe. Czy ten kalkulator też się zepsuł?

Odpowiedź

Zdiagnozujmy najpierw kalkulator Małgosi. Liczba 13^{10} jest tak duża, że przekracza jego możliwości rachunkowe. Najwyższą potęgą trzynastu, jaką potrafi pokazać dokładnie ten kalkulator, jest 13^7. Liczba 13^8, równa 815 730 721, jest już za długa i nie mieści się na wyświetlaczu. Kalkulator Małgosi obciął jej ostatnią cyfrę i pokazał pozostałe w notacji wykładniczej jako $8.1573072 \cdot 10^8$ (ponieważ zawsze obcina on tylko jedną cyfrę, nie pokazuje wykładnika z E – domyślnie zawsze wynosi on 8, bo kalkulator Małgosi ma 8-cyfrowy wyświetlacz). Oczywiście jest to wynik przybliżony. Pierwszych 8 cyfr wyniku znamy dokładnie i wiemy, że jest jeszcze jedna cyfra, ale nie wiemy, jaka (co jednak przy tej wielkości wyniku do celów praktycznych nie ma dużego znaczenia). Wyższych potęg 13 kalkulator Małgosi nie pokaże – sygnalizuje błąd. Tak duże liczby przekraczają możliwości jego pamięci.

A teraz spróbuj sam...

1. Wciskamy ciąg klawiszy 2 × 3 = = = =... Jakie działanie powtarza kalkulator? A jeśli wciśniemy 2 + 3 = = =...?

2. Oblicz na 10-cyfrowym kalkulatorze $987987654654 \cdot 321321$.

3. Kalkulator graficzny ma rozdzielczość 96 × 64 piksle (96 w poziomie). Jak ustawić zakres ekranu, aby wykres funkcji sinus był linią prostą na poziomie: a) 1, b) $\frac{1}{2}$?

4. Jak sprawdzić bez liczenia i zaglądania do instrukcji, ile piksli ma wyświetlacz kalkulatora graficznego?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Kalkulator Jasia jest 10-cyfrowy. Liczby, które mają więcej cyfr, pokazuje w notacji wykładniczej. Np. w 13^{10} obcina dwie ostatnie cyfry, dziesięć pierwszych pokazuje dokładnie i podaje informację, że są jeszcze dwie, które mu się nie zmieściły. W ten sposób kalkulator Jasia poradzi sobie jeszcze z przybliżonym obliczeniem 13^{89} – pokazuje 1.383433715 E99, to znaczy, że wynik jest liczbą 100-cyfrową, ale tylko 10 pierwszych jego cyfr znamy dokładnie. Przy dalszym mnożeniu przez 13 kalkulator wskazuje błąd.

Problem

Nie wspomnieliśmy o tym wcześniej, ale Jaś i Małgosia założyli się, komu z nich uda się obliczyć 13^{10} w sposób dokładny. Ich kalkulatory zawiodły. Jak mogą sobie poradzić? Żadne z nich nie chciałoby liczyć tego w pamięci lub pisemnie. Co mają zrobić?

Odpowiedź

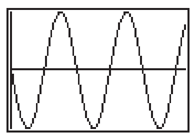
Użyć... swoich kalkulatorów. A także odrobiny sprytu i praw działań. Ponieważ kalkulator Małgosi miał słabszą „moc obliczeniową”, użyjmy właśnie jego do rozwiązania problemu (Jaś może postąpić podobnie). Zauważmy, że $13^{10} = 13^7 \cdot 13^3$. Obie te liczby kalkulator Małgosi obliczy dokładnie i otrzymamy iloczyn $62\,748\,517 \cdot 2197$. Oczywiście wynik mnożenia już się na kalkulatorze nie zmieści. Zróbmy więc tak: $62\,748\,517 \cdot 2197$ = [stosujemy łączność dodawania] = $(62\,740\,000 + 8517) \cdot 2197$ = [stosujemy rozdzielność mnożenia względem dodawania] = $62\,740\,000 \cdot 2197 + 8517 \cdot 2197$ = [te wyniki łatwo uzyskać za pomocą kalkulatora, bo zera „nie biorą udziału” w mnożeniu] = $137\,839\,780\,000 + 18\,711\,849$ = [te składniki łatwo dodać pisemnie, w znacznej części sprowadza się to do przepisania ich cyfr – patrz ramka obok].

$$\begin{array}{r} 137839780000 \\ +\quad 18711849 \\ \hline 1378\underbrace{\mathbf{5849}}_{}1849 \end{array}$$

strefa dodawania w zakresie 20

Przykład 4

Na kalkulatorze graficznym oglądamy wykres funkcji $y = \sin x$. Obraz na wyświetlaczu wygląda tak, jak na rys. 1. Ale to przecież wykres funkcji $y = -\sin x$. Czy kalkulator źle działa?

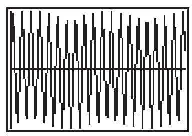


Rys. 1

Odpowiedź

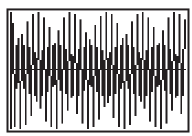
Wyświetlacz kalkulatora przypomina szachownicę, na której pewne pola są zaczernione, a inne nie, i w ten sposób powstaje na nim „obrazek”, np. wykres funkcji. Jeśli wyświetlacz składa się z $(m+1) \times n$ takich pól ($m + 1$ pól w poziomie), to zadeklarowany zakres na osi X zostanie podzielony na m równych części ($\Delta = \frac{x_{mx} - x_{min}}{m}$), poczynając od x_{min}, argument będzie zmieniał się krokiem Δ i dla wyliczonych w ten sposób x-ów będzie obliczana wartość funkcji i zapalany odpowiedni punkt wykresu. Gdyby tak dobrać zakres, że Δ będzie równa okresowi funkcji, na ekranie zobaczylibyśmy wykres funkcji stałej. Dzięki tej własności kalkulatora wykres tej samej funkcji może na ekranie przyjmować różne kształty, często właściwie losowe. Na rys. 1 dla wyświetlacza o rozdzielczości 96 × 64 piksle zakres w stopniach dobrano od 0 do 95 · **359** · 10.

$y = \sin x,\ x \in [0°, 7000°]$



Rys. 2

$y = \sin x,\ x \in [0°, 12000°]$



Rys. 3

Małgorzata Mikołajczyk, Wrocław