Samouczek zadaniowy

# Figury magiczne

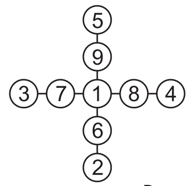
*Wśród łamigłówek logicznych dużym powodzeniem cieszy się układanie magicznych figur liczbowych. Są to zestawy linii, wzdłuż których rozmieszczamy liczby w taki sposób, aby sumy na każdej linii były jednakowe. Często problemy tego typu mają więcej niż jedno rozwiązanie. Poniższe zadania w wersji podstawowej są rozwiązane, rozwiązanie ich odpowiedników w wersji prim pozostawiamy Czytelnikom. Na odpowiedzi czekamy do końca marca.*

## Magiczny krzyż

Liczby całkowite od 1 do 9 ułóż w dwa rzędy w taki sposób, aby sumy liczb w każdym rzędzie były jednakowe. Czy jest to w ogóle możliwe?

### Rozwiązanie

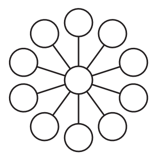
Suma wszystkich podanych liczb to 45. Jeśli każdy ze składników należałby tylko do jednego rzędu, to suma w każdym rzędzie powinna być połową tej liczby, co jest niemożliwe. Zatem rzędy nie mogą być rozłączne. Ułożenie liczb w dwa przecinające się rzędy jest łatwe. Można to zrobić np. tak, jak na rys. 1. Suma liczb w każdym rzędzie to 23. Taką figurę nazwiemy magicznym krzyżem, a 23 jego magiczną sumą. Jest to najprostsza z magicznych figur liczbowych. Jakie inne magiczne krzyże można zbudować z danych liczb? Jakie mogą być ich magiczne sumy? Jakie liczby mogą znajdować się na skrzyżowaniu rzędów?



Rys. 1

## Magiczne koło

W kółka (rys. 2) wpisz liczby od 1 do 11, tak aby sumy na każdej linii były jednakowe.

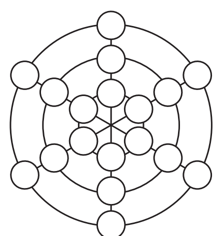

Rys. 2

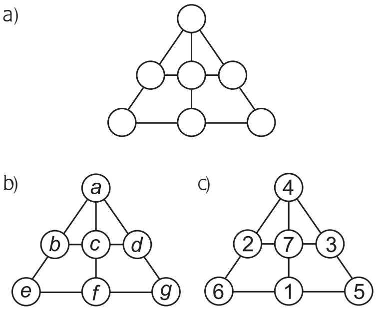
### Rozwiązanie

Wystarczy zauważyć, że w ciągu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sumy liczb w równych odległościach od końców wynoszą 12, a 6 jest bez pary. Zatem wystarczy wpisać 6 w środkowe kółko, a pozostałe liczby w kolejności rosnącej w kółka na okręgu. Czy w środku może nie być szóstki?

## Magiczne koło’

W kółka (rys. 3) wpisz liczby od 1 do 18, tak aby sumy na średnicach i okręgach były jednakowe.


Rys. 3



Rys. 4

## Magiczna piramida

W kółka piramidy (rys. 4a) wpisz liczby całkowite od 1 do 7 w taki sposób, aby sumy liczb wpisanych w kółka leżące na tej samej linii były równe.

### Rozwiązanie

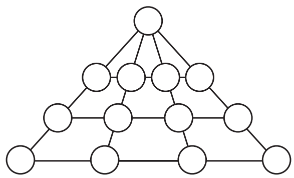
Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku 4b i niech $s$ będzie sumą magiczną liczb leżących na jednej linii. Suma liczb ze wszystkich linii wynosi $5s$, a z drugiej strony jest równa

$$3a+2(b+c+d+e+f+g).$$

Mamy zatem

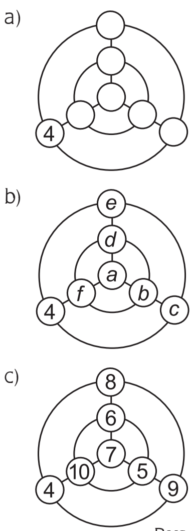
$$a+2(a+b+\ldots+g) = a+2(1+2+\ldots+7) = a+56 = 5s,$$

skąd $a = 4$, bo lewa strona musi być podzielna przez 5. Wtedy $5s = 60$, czyli $s = 12$. Teraz już łatwo podać rozwiązanie (rys. 4c). Czy istnieją rozwiązania istotnie inne?


Rys. 5

## Magiczna piramida'

W kółka piramidy (rys. 5) wpisz liczby całkowite od 1 do 13 w taki sposób, aby sumy liczb wpisanych w kółka leżące na tej samej linii były równe.



Rys. 6

## Magiczne kręgi

W kółka (rys. 6a) wpisz siedem kolejnych liczb całkowitych w taki sposób, aby trzy liczby na każdym z okręgów i na każdym z promieni dawały sumę magiczną 21.

### Rozwiązanie

Przy oznaczeniach jak na rysunku 6b mamy:

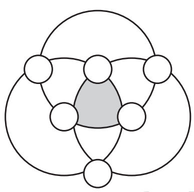
$$\begin{cases} a+b+c=21 \\ a+d+e=21 \\ a+f=17 \\ b+d+f=21 \\ c+e=17, \end{cases} \quad \text{co daje równoważny układ} \quad \begin{cases} a=7 \\ f=10 \\ b=e-3 \\ c=17-e \\ d=14-e. \end{cases}$$

Jedynie dwie wartości zmiennej $e$ prowadzą do zachowania kolejności wszystkich siedmiu liczb:

a) $e = 9$, co daje $b = 6$, $c = 8$, $d = 5$,

b) $e = 8$, co daje $b = 5$, $c = 9$, $d = 6$.

Są to dwie wersje rozwiązania (z dokładnością do przestawienia promieni).

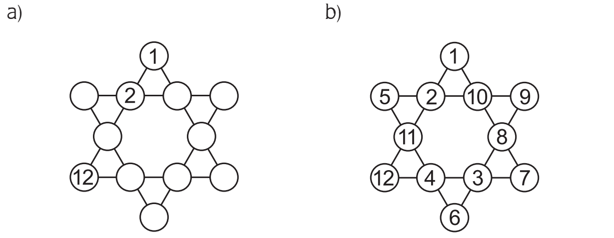

Rys. 7

## Magiczne kręgi'

W kółka (rys. 7) wpisz liczby całkowite od 1 do 6 w taki sposób, aby sumy liczb na okręgach były równe, a suma liczb sąsiadujących z „szarą strefą" była dzielnikiem sumy magicznej liczb na okręgu.

## Magiczna gwiazda

W kółka gwiazdy sześcioramiennej (rys. 8a) wpisz liczby całkowite od 3 do 11 w taki sposób, aby sumy liczb wpisanych w kółka leżące na tej samej linii były równe.



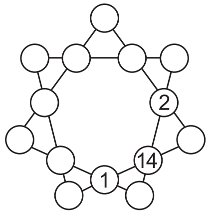

Rys. 8

### Rozwiązanie

Patrz artykuł *Droga do gwiazd* s. 18. Jedno z możliwych rozwiązań przedstawia rys. 8b.

## Magiczna gwiazda’

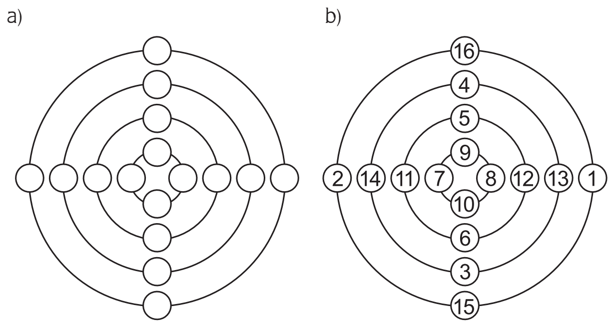
W kółka gwiazdy siedmioramiennej (rys. 9) wpisz liczby całkowite od 3 do 13 w taki sposób, aby sumy liczb wpisanych w kółka leżące na tej samej linii były równe.



Rys. 9

## Magiczne planetarium

Ciężary planet w małym planetarium (rys. 10a) wyrażają się różnymi liczbami całkowitymi od 1 do 16. Określ te ciężary, wiedząc, że ich sumy wzdłuż każdego promienia i każdej orbity są jednakowe.




Rys. 10

### Rozwiązanie

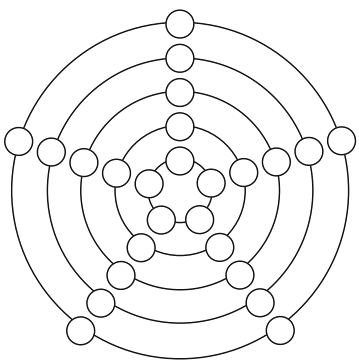
Suma magioczna wynosi

$$\frac{(1+16)16}{2} : 4 = 34,$$

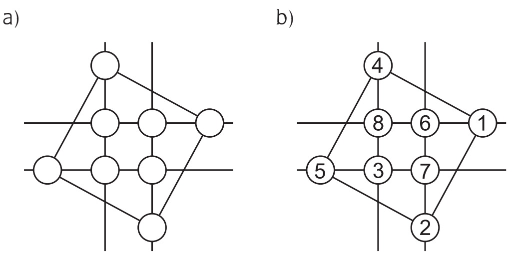
a suma wzdłuż średnicy to $68 = 4 \cdot 17$. Dobieramy liczby w pary o sumie 17 $(1+16,\ 2+15,\ \ldots)$ i rozmieszczamy jak na rys. 10b. Czy istnieją istotnie inne rozwiązania?

## Magiczne planetarium’

Ciężary planet w dużym planetarium (rys. 11) wyrażają się różnymi liczbami całkowitymi od 1 do 25. Określ te ciężary, wiedząc, że ich sumy wzdłuż każdego promienia i każdej orbity są jednakowe.



Rys. 11



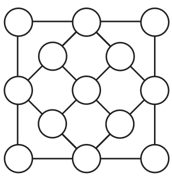

Rys. 12

## Magiczne kwadraty

W kółka (rys. 12a) wpisz liczby od 1 do 8 w taki sposób, aby sumy liczb położonych na tej samej linii prostej były równe, a suma liczb wpisanych w kółka tworzące wewnętrzny kwadrat była dwukrotnie większa od sumy liczb wpisanych w kółka tworzące zewnętrzny kwadrat.

### Rozwiązanie

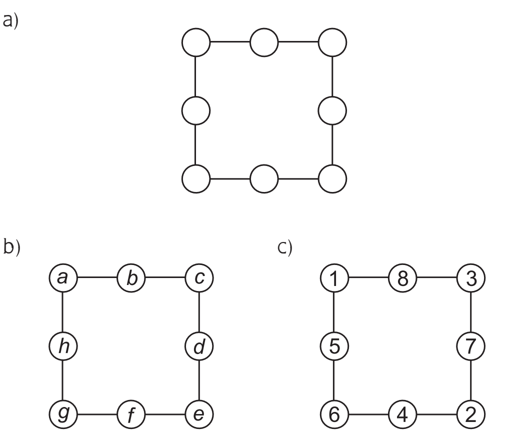
Patrz rys. 12b. Czy są inne rozwiązania?



Rys. 13

## Magiczne kwadraty'

Znajdź 13 liczb całkowitych (w tym 11 różnych i dwie powtórzone dwukrotnie) i wpisz je w kółka (rys. 13) w taki sposób, aby suma liczb wzdłuż każdej z 10 linii wynosiła 20. Najmniejszą z szukanych liczb jest 1, a największą 15.



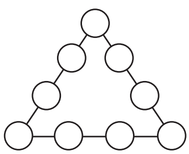

Rys. 14

## Magiczny wielokąt

W kółka (rys. 14) wpisz liczby całkowite od 1 do 8, tak aby sumy liczb na każdym boku kwadratu były równe.

### Rozwiązanie

Po zapisaniu równości sum na bokach i dodaniu stronami otrzymujemy $36+a+c+$ $+e+g=4s$, gdzie $s$ jest sumą magiczną. Stąd widać (jak?), że $a+c+e+g$ jest podzielne przez 4, a najmniejsze możliwe $s$ wynosi 12. Te warunki spełnia rozwiązanie z rys. 14c. Czy tylko ono? Jakie są inne możliwe wartości $s$? Jakie dają rozwiązania? Podany przykład ma równe sumy kwadratów liczb na dwóch bokach. Czy mogą one być równe na wszystkich bokach?



Rys. 15

## Magiczny wielokąt'

W kółka (rys. 15) wpisz liczby całkowite od 1 do 9, tak aby sumy liczb na każdym boku trójkąta były równe. Czy potrafisz zrobić to tak, aby również sumy kwadratów liczb na każdym boku były równe?

opracował Piotr Kryszkiewicz, Milicz