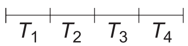
Kwadratura odcinka

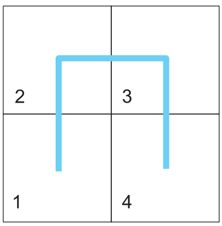
W artykule pokazujemy, że odcinek jest kwadratem. Dokładniej, że istnieje ciągłe odwzorowanie odcinka ***na*** *kwadrat, co jest sprzeczne z powszechną intuicją. Istnienie takiego odwzorowania odkryto dopiero w XIX w.*

Nasze zadanie polega na tym, aby każdemu punktowi odcinka przyporządkować w sposób ciągły pewien punkt kwadratu tak, by każdy punkt kwadratu był wykorzystany. Przyporządkowanie to będzie ciągłe, jeśli „nie rozerwie” odcinka, tzn. bliskie punkty odcinka przejdą na bliskie punkty kwadratu.



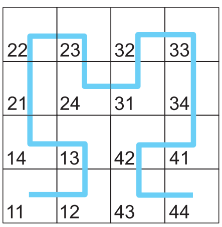
Rys. 1

Krok 1. Podzielmy odcinek T na cztery równe części i oznaczmy je literami T_1, T_2, T_3, T_4 w kolejności od lewej do prawej – rys. 1. Podzielmy kwadrat Q na cztery przystające kwadraty i oznaczmy je przez Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 jak na rys. 2 (linia wskazuje kolejność numerowania). Powstałe w ten sposób odcinki T_i i kwadraty Q_i nazwijmy odcinkami i kwadratami pierwszego rzędu.



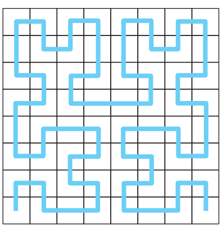
Rys. 2

Krok 2. Podzielmy dalej każdy z odcinków T_1, T_2, T_3, T_4 znowu na cztery równe części i oznaczmy powstałe w ten sposób odcinki z podziału T_1 kolejno przez T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, z podziału T_2 przez T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, z podziału T_3 przez T_{31}, T_{32}, T_{33}, T_{34}, z podziału T_4 przez T_{41}, T_{42}, T_{43}, T_{44}. Szesnaście nowo otrzymanych odcinków nazwijmy odcinkami drugiego rzędu. Podzielmy też każdy z kwadratów Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 na cztery przystające kwadraty. Powstanie szesnaście kwadratów rzędu drugiego. Kwadraty otrzymane z Q_1 oznaczymy przez Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, z Q_2 przez Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, Q_{24}, z Q_3 przez Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, Q_{34}, z Q_4 przez Q_{41}, Q_{42}, Q_{43}, Q_{44} (rys. 3).



Rys. 3

Krok *n*. Opisany proces podziału odcinków i kwadratów możemy kontynuować w nieskończoność (rys. 4 ilustruje krok 3, linia wskazuje kolejność numerowania kwadratów)*. Długości odcinków i boków kwadratów otrzymanych w kolejnych krokach dążą do zera. Jeżeli przyjmiemy, że długość wyjściowego odcinka i boku kwadratu wynosi 1, to długości odcinków rzędu n będą równe $\left(\frac{1}{4}\right)^n$, a boków kwadratów $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.



Rys. 4

* W każdym kroku konstrukcji otrzymujemy kolejne przybliżenie pewnej fraktalnej krzywej zwanej od nazwiska pomysłodawcy **krzywą Hilberta**. Ciekawym zadaniem jest napisanie programu komputerowego, który potrafiłby te przybliżenia rysować.

Odwzorowanie. Przyporządkujmy teraz każdemu odcinkowi $T_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$, gdzie $\lambda_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, kwadrat tego samego rzędu i o tym samym numerze, czyli $Q_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$. Pozwoli nam to zbudować interesujące nas odwzorowanie.

Wybierzmy dowolny punkt t_0 z odcinka T. Należy on do co najmniej jednego odcinka rzędu pierwszego, T_{α_1}, co najmniej jednego odcinka rzędu drugiego, $T_{\alpha_1\alpha_2}$, zawartego w T_{α_1} itd. Przyjrzyjmy się teraz kwadratom odpowiadającym wybranym odcinkom. Otrzymamy w ten sposób nieskończony ciąg kwadratów $Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots$ o tej własności, że każdy następny zawiera się w poprzednim. Ponieważ długości ich boków dążą do zera, wszystkie te kwadraty mają punkt wspólny q_0, który przyporządkujemy punktowi t_0 (patrz twierdzenie obok). Zatem wykazaliśmy, że każdemu punktowi odcinka T odpowiada jeden punkt kwadratu Q.

Musimy jeszcze udowodnić, że każdy punkt kwadratu Q odpowiada jakiemuś (co najmniej jednemu) punktowi odcinka T. Weźmy dowolny punkt q_0 kwadratu Q. Należy on do co najmniej jednego kwadratu Q_{α_1} rzędu pierwszego, co najmniej jednego kwadratu rzędu drugiego $Q_{\alpha_1\alpha_2}$ zawartego w Q_{α_1} itd. Weźmy odcinki odpowiadające tym kwadratom $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots$ Każdy z nich jest zawarty w poprzednim oraz ich długości dążą do zera, więc mają one dokładnie jeden punkt wspólny (dlaczego?). Oznaczmy go przez t_0. Temu punktowi odpowiada q_0.

Ciągłość. Pozostało jeszcze wykazać, że tak skonstruowane odwzorowanie $f\colon T \to Q$ jest ciągłe. Jeżeli punkt t_0 jest dowolnym punktem odcinka T, to dla dowolnego n punkt t odległy od niego o mniej niż $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ leży w tym samym lub sąsiednim odcinku rzędu n. Wtedy punkty $q_0 = f(t_0)$ i $q = f(t)$ należą do tych samych lub sąsiednich kwadratów rzędu n. Oznacza to, że jeśli weźmiemy punkt t dostatecznie bliski punktowi t_0, to odpowiadający mu punkt $q = f(t)$ jest dowolnie bliski punktowi $q_0 = f(t_0)$. Zatem odwzorowanie f jest ciągłe.

Każde ciągłe przekształcenie odcinka **na** kwadrat nosi nazwę **odwzorowania Peana** (od nazwiska włoskiego matematyka Giuseppe Peana żyjącego na przełomie XIX i XX w.). Inne przykłady takich odwzorowań przedstawiono na II stronie okładki (krzywa Sierpińskiego) i s. 11 (krzywa Peana).

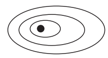
To samo? Czy zatem istotnie odcinek i kwadrat są dla matematyka tym samym? Mają przecież zupełnie inne własności. Odcinek jest jednowymiarowy, a kwadrat dwuwymiarowy...

Aby matematyk uznał dwa obiekty za to samo, jeden z nich musi dać się odwzorować w sposób ciągły na drugi, ale ten drugi także w sposób ciągły na pierwszy. Czy kwadrat można w sposób ciągły odwzorować na odcinek? Opisane odwzorowanie nie jest różnowartościowe (dlaczego?), zatem nie da się go odwrócić bez rozrywania. Czy można wymyślić inne?

Renata Wiertelak, Łódź

Twierdzenie

Ciąg zbiorów domkniętych na prostej lub płaszczyźnie o średnicach dążących do zera, z których każdy kolejny zawiera się w poprzednim ma niepusty, jednopunktowy przekrój.



A teraz spróbuj sam...

1. Jaki punkt krzywej Hilberta (postającej według opisu w artykule) jest obrazem liczb: $0, 1, \frac{1}{2}$?

2. Na co przechodzą liczby 0, 1, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{9}$ zgodnie z odwzorowaniem Peano ze s. 11?

3. Przyjmijmy, że zero ma taki sam obraz w granicznej krzywej Sierpińskiego (przedstawionej na okładce). Gdzie wówczas wypadną obrazy liczb: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$? A jeśli obrazem zera byłby punkt, w kórym krzywa ta „wchodzi” do lewej dolnej ćwiartki kwadratu?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.