6. A jak jest z okręgami stycznymi do okręgów? A jeśli muszą przechodzić przez ustalony punkt? Gdzie leżą ich środki? Jakie figury tworzą? Jak takie okręgi styczne narysować?

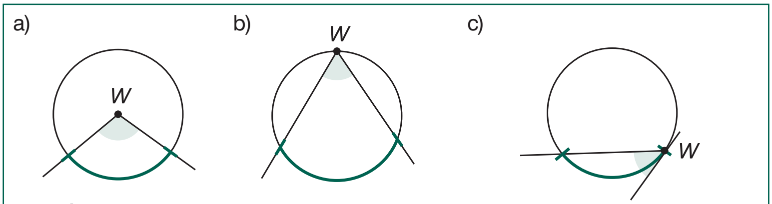
7. Na ile części mogą podzielić płaszczyznę trzy proste? Na ile najmniej, a na ile najwięcej? Czy wszystkie możliwości pośrednie da się też uzyskać? A jeśli prostych jest mniej? A jeśli jest więcej? Jaka będzie odpowiedź dla 117 prostych? Na ile części mogą podzielić płaszczyznę trzy okręgi? Na ile najmniej, a na ile najwięcej? Czy można uzyskać wszystkie możliwości pośrednie? A jeśli okręgów jest mniej? A jeśli jest więcej? Jaka będzie odpowiedź dla 117 okręgów?

Koła i szprychy

Ze szkoły każdy pamięta, że styczna jest prostopadła do promienia okręgu, a kąt środkowy jest dwa razy większy od wpisanego opartego na tym samym łuku. W nowej podstawie programowej dla liceum znalazły się jeszcze zagadnienia dotyczące długości odcinków powstałych na prostych przecinających się z okręgiem. Okazuje się jednak, że metodami dobrze znanymi każdemu gimnazjaliście można opisać wszystkie związki miarowe między dowolnymi odcinkami lub kątami utworzonymi przez proste leżące w sąsiedztwie okręgu.

Ze szkolnego elementarza

Przypomnijmy na początek podstawowe pojęcia dotyczące kątów wyznaczonych przez dany łuk okręgu.



a) **Kąt środkowy** ma wierzchołek w środku okręgu i ramiona przechodzące przez końce łuku.

b) **Kąt wpisany** ma wierzchołek na okręgu poza danym łukiem i ramiona przechodzące przez końce łuku.

c) **Kąt dopisany** ma wierzchołek w jednym z końców łuku i ramiona przechodzące przez końce tego łuku, przy czym jedno z nich jest zawarte w stycznej.

Rys. 1

Odpowiedzi

„Ścinanie narożników na bis”

Ścianami obu tych wielościanów są pentagramy. Ścięcie wierzchołków pentagramu prowadzi do uzyskania wielokąta foremnego tylko po całkowitym odcięciu ramion. Zaś odcięcie ramion prowadzi do uzyskania odpowiednio foremnego dwunastościanu lub dwudziestościanu.

A teraz spróbuj sam odpowiedzieć na kilka pytań:

1) czy każdy łuk okręgu wyznacza jakiś kąt a) środkowy, b) wpisany, c) dopisany?

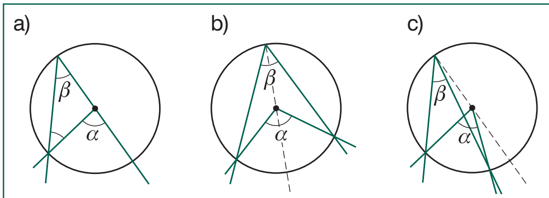
2) ile jest kątów a) środkowych, b) wpisanych, c) dopisanych wyznaczonych przez dany łuk?

Zachodzi **twierdzenie**: kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego lub dopisanego opartego na tym samym łuku.

Skąd my to wiemy?

Rozważmy najpierw szczególne położenie kąta środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku, gdy jedno z ramion kąta wpisanego przechodzi przez środek okręgu (jak na rys. 2a). Widać, że kąt α jest zewnętrzny w trójkącie, w którym nieprzyległe do niego kąty wewnętrzne wynoszą β (dlaczego?), zatem $\alpha = 2\beta$.

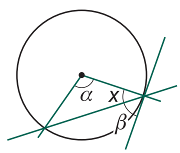
Oczywiście kąt wpisany i środkowy mogą leżeć także inaczej względem siebie, np. jak na rysunkach 2b lub 2c. W obu tych przypadkach poprowadzono pomocniczą linię przerywaną, która pozwala sprowadzić rozumowanie do przypadku z rysunku 2a. Jak? Czy są to już wszystkie możliwe wzajemne położenia kąta środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku?



$\beta = \frac{1}{2}\alpha$

Rys. 2

Pozostał jeszcze przypadek kąta dopisanego opartego na tym samym łuku, co kąt środkowy (rys. 3). Zauważmy, że $\beta + x = 90°$ oraz $\alpha + 2x = 180°$. Stąd mamy, że $\alpha = 2\beta$.



$\beta = \frac{1}{2}\alpha$

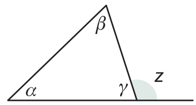
Rys. 3

A teraz spróbuj sam uzasadnić poniższe fakty:

1) kąty środkowe oparte na przystających łukach są przystające,

2) kąty dopisane lub wpisane oparte na tym samym łuku lub na przystających łukach są przystające.

Czy twierdzenia odwrotne do powyższych są prawdziwe? Sformułuj je i uzasadnij lub obal.



W artykule wielokrotnie korzystamy z faktu, że kąt zewnętrzny trójkąta jest sumą kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

$z = 180° - \gamma = \alpha + \beta + \gamma - \gamma = \alpha + \beta$

Sztafeta pokoleń, czyli

Primaaprilisowe wzory

Uzupełnij zdania tak, by były prawdziwe (i zaraz potem o nich zapomnij).

5. **Kwadrat** o boku .... ma pole równe $4a$ i obwód ....

Kwadrat o boku .... ma obwód równy a^2 i pole ....

10. **Kwadrat** o boku .... ma pole równe πr^2 i obwód ....

Koło o promieniu .... ma pole równe a^2 i obwód ......

15. **Koło** o promieniu ...... ma pole równe $2\pi r$ i obwód ....

Koło o promieniu ...... ma obwód równy πr^2 i pole ....

20. **Sześcian** o krawędzi .... ma objętość równą $\frac{4}{3}\pi r^3$ i pole powierzchni ....

Kula o promieniu .... ma objętość równą a^3 i pole powierzchni ....

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Odpowiedzi

„Co tam w Opolskiem?”

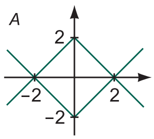
OMOM

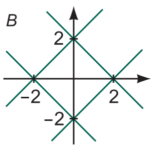
1. Zauważ, że $(2+\sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$. Liczba ma wartość 4.

2. (1, 1) i (3, 2).

3. Udowodnij, że $\frac{AA_1}{A_1M} = \frac{S}{S_A}$, gdzie S – pole ΔABC, S_A – pole ΔBCM. Stąd $\frac{AM}{A_1M} = \frac{S_B + S_C}{S_A}$, S_B – pole ΔACM, S_C – pole ΔABM. Zapisz analogicznie pozostałe równości. Dodaj otrzymane wyrażenia i skorzystaj z faktu, że $x + \frac{1}{x} \geq 2$ dla $x > 0$.

4. $A \cap B = A$.





5. Podnieś obie strony do kwadratu i sprowadź nierówność do postaci: $(\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2 \geq 0$.

KKM

1. 19,5%.

2. Pole 30, obwód 30.

3. Parzysty 48, Nieparzysty 63.

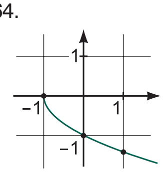
4. $\left(2\frac{3}{16},\ 6\frac{1}{8},\ 10\frac{1}{16}\right)$

5. $x \in (-3,-1) \cup (2,\infty)$

6. 1984 i 2002.

7. 964.

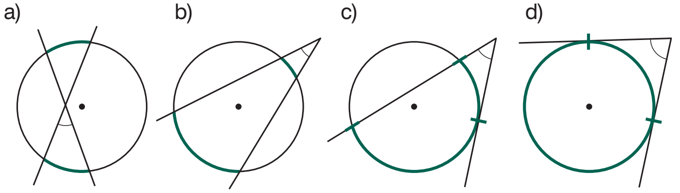
8.



cd. na stronie 16

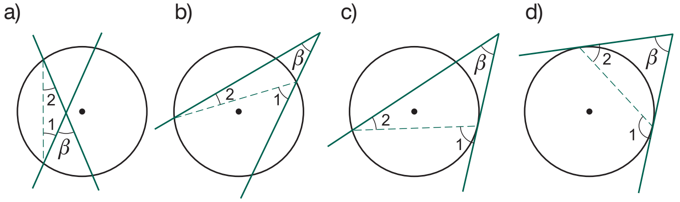
Kąty między szprychami

Zauważmy, że w opisanym wyżej twierdzeniu ramiona rozważanych kątów były zawsze stycznymi lub siecznymi okręgu. Istnieją jeszcze inne kąty, których ramiona mają tę własność. Przyjmijmy, że takie kąty są wyznaczone przez 2 łuki o rozłącznych wnętrzach (jak na rys. 4).



Rys. 4

Okazuje się, że we wszystkich przypadkach można równie łatwo wyznaczyć miary tych kątów. Pomocnicze linie przerywane na rys. 5 tworzą trójkąt, w którym szukany kąt β jest zewnętrzny (rys. 5a) lub wewnętrzny (rys. 5b–d), dzięki czemu łatwo go obliczyć za pomocą kątów wpisanych opartych na łukach wyznaczających szukany kąt.



Rys. 5

Możemy więc sformułować **ogólniejsze twierdzenie**, które właśnie udowodniliśmy:

kąt, którego ramiona są zawarte w stycznych lub siecznych do okręgu, jest:

– sumą (jeśli jego wierzchołek jest wewnątrz okręgu)

– różnicą (jeśli jego wierzchołek jest na zewnątrz okręgu)

kątów wpisanych opartych na łukach wyznaczających ten kąt

lub równoważnie:

– połową sumy (jeśli jego wierzchołek jest wewnątrz okręgu)

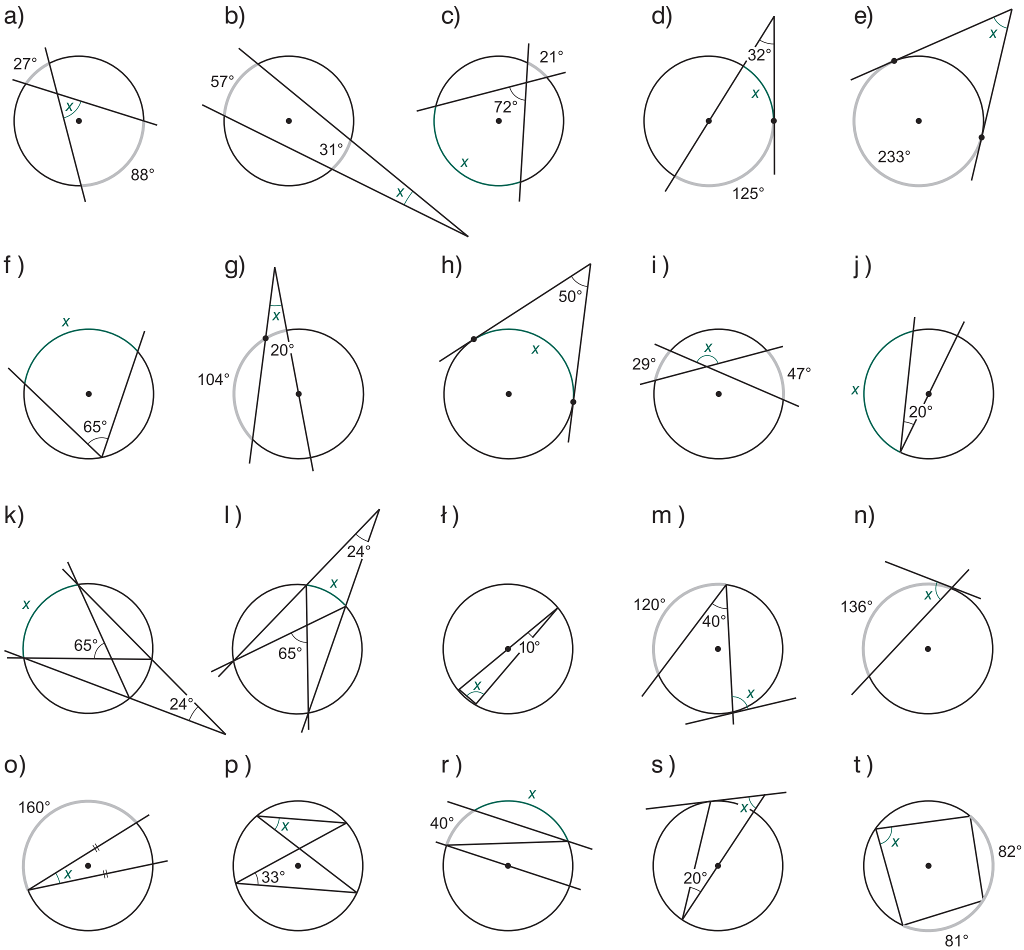
– połową różnicy (jeśli jego wierzchołek jest na zewnątrz okręgu)

kątów środkowych opartych na łukach wyznaczających ten kąt.

Jest to bardzo prosta i elegancka własność, o której (nie wiedzieć czemu) mówi się w szkole tylko w szczególnym przypadku kąta wpisanego w okrąg. Co ciekawe, twierdzenie to może być stosowane w wielu różnych sytuacjach geometrycznych. Przykłady podajemy poniżej.

A teraz spróbuj sam (1)...

Zadanie 1. Oblicz x. Na rysunkach przyjęto konwencję, że na łukach podano miary kątów środkowych opartych na tych łukach.



Zadanie 2. Okrąg podzielono na trzy łuki w proporcjach 3 : 4 : 5. Jaką miarę ma kąt styczna–sieczna oparty na największym z tych łuków?

Zadanie 3. Jaką miarę ma kąt sieczna–sieczna oparty na $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{4}$ okręgu?

Zadanie 4. Kąt sieczna–sieczna z wierzchołkiem na zewnątrz okręgu ma miarę 20° i jest oparty na łuku stanowiącym $\frac{3}{5}$ okręgu. Jaką miarę ma kąt sieczna–sieczna z wierzchołkiem wewnątrz okręgu oparty na tym samym łuku?

Zadanie 5. Przez środek C łuku AB, na którym oparty jest ostry kąt wpisany, poprowadzono cięciwy CD i CE przecinające AB w punktach H i F. Pokaż, że czworokąt $DEFH$ można wpisać w okrąg.

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Odpowiedzi

cd. ze strony 14

PZM Olesno

1. 720 litrów.

2. Liczby postaci $a\frac{a}{a^2-1}$, np. $4\frac{4}{15}$

3. 9π cm^2.

4. $\frac{p}{2}$.

5. $f(x)\begin{cases}0 & \text{dla } x\in\mathbb{R}\setminus\langle -2,1) \\ -2x^2-2x+4 & \text{dla } x\in(-2,1)\end{cases}$

Nie jest monotoniczna.

KKM im. T. Knysza

1. $\frac{3094}{6097}$

2. Wykaż, że suma pól trójkątów *ABE* i *DCE* jest połową pola trapezu.

3. Najprościej jest rozszerzyć ułamki przez $\sqrt{2}$, skorzystać z $(\sqrt{3}\pm 1)^2 = 4\pm 2\sqrt{3}$ i sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika.

4. $33^{60} > 32^{60} = 2^{300} = 64^{50} > 63^{50}$

5. $\text{NWW}(2,3,4,5,6,7)+1 = 421$.

WKM dla ZSZ

1. 2.

2. $\sqrt{10}$, np. przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 1 i 3.

3. $2\sin 67{,}5°$

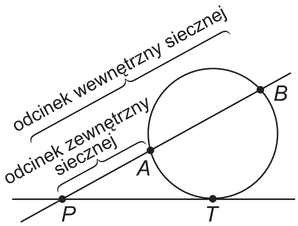
4. $1\frac{3}{7}$

5. $6{,}75\pi$ cm^3

cd. na stronie 36

Odcinki na szprychach

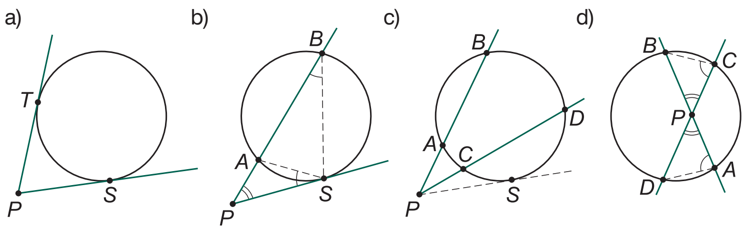
Tym razem będą nas interesowały nie miary kątów, lecz długości odcinków powstających na siecznych i stycznych do okręgu. Poprowadźmy z punktu P sieczną i styczną do okręgu, jeśli P jest na zewnątrz, lub tylko sieczną, jeśli P jest wewnątrz okręgu (rys. 6).



Rys. 6

Nazwijmy **odcinkiem siecznej/stycznej** odcinek od punktu P do punktu przecięcia odpowiedniej prostej z okręgiem (odcinki siecznej są dwa, a odcinek stycznej – jeden). Możemy przyjąć, że styczna do okręgu jest szczególnym przypadkiem siecznej, dla której punkty przecięcia siecznej z okręgiem pokrywają się (zatem pokrywają się też oba odcinki siecznej). Zachodzi **twierdzenie**: iloczyn długości odcinków siecznej na wszystkich siecznych poprowadzonych z danego punktu jest taki sam.

Twierdzenie to można łatwo uzasadnić korzystając z własności trójkątów podobnych. Rozważmy kilka przypadków.



a) $PS = PT$ z symetrii, $PS^2 = PT^2$

b) $\Delta PAS \approx \Delta PSB$, $\frac{PA}{PS} = \frac{PS}{PB}$, $PS^2 = PA\cdot PB$

c) $PA\cdot PB = PS^2 = PC\cdot PD$

d) $\Delta PCB \approx \Delta PAD$, $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, $PA\cdot PB = PC\cdot PD$

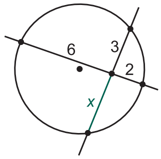
Rys. 7

Twierdzenie to, tradycyjnie nazywane **twierdzeniem o potędze punktu względem okręgu**, bo tak właśnie nazwany jest iloczyn, o którym mówi, bardzo często wykorzystywały zadania z różnych konkursów i olimpiad matematycznych, ale dopiero teraz oficjalnie znalazło się w nowej podstawie programowej z matematyki dla liceów. I bardzo dobrze się stało, bo choć jest to tylko zwykłe wykorzystanie własności trójkątów podobnych, daje jednak możliwość zastosowania w wielu prostych i bardziej skomplikowanych sytuacjach geometrycznych. Proste przykłady podajemy poniżej, a te bardziej skomplikowane w *Klubie olimpijczyka* na s. 18.

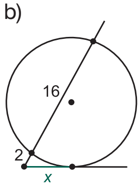
A teraz spróbuj sam (2)...

Zadanie 6. Oblicz *x*. O ile nie zaznaczono inaczej, liczba oznacza długość odcinka między sąsiednimi kropkami.

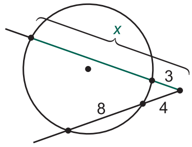
a)



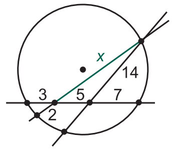
b)



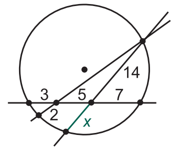
c)



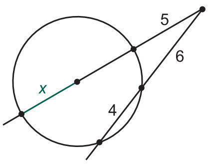
d)



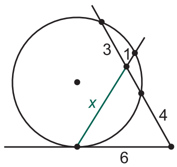
e)



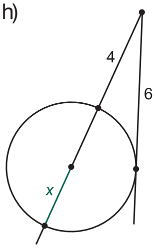
f)



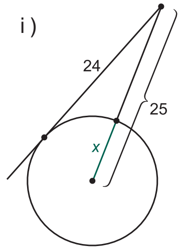
g)



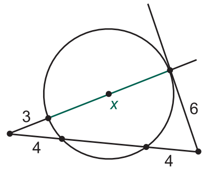
h)



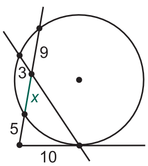
i)



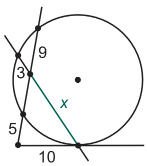
j)



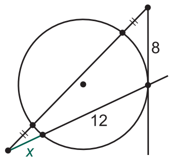
k)



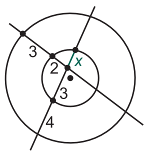
l)



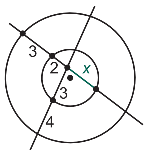
ł)



m)



n)



Zadanie 7. Odcinek stycznej z punktu *P* ma 8 cm. Promień okręgu ma 6 cm. Jaka jest odległość punktu *P* od okręgu?

Zadanie 8. Jaka jest odległość środka okręgu o promieniu 15 cm i jego cięciwy o długości 18 cm?

Zadanie 9. Jaki promień ma okrąg, którego cięciwa o długości 24 cm leży 5 cm od środka?

Zadanie 10. W kąt wpisano dwa okręgi, przy czym A_1 i B_1 są punktami styczności pierwszego okręgu, a A_2 i B_2 – drugiego. Odcinek A_1B_2 przecina te okręgi w punktach C_1 i C_2. Pokaż, że $A_1C_1 = B_2C_2$.

Zadanie 11. Sformułuj i udowodnij twierdzenie odwrotne do potęgi punktu względem okręgu.

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.