

Samouczek zadaniowy

Kolorowe szachownice

Wdzięcznym tematem zadań łamiętkówkowych są szachownice. Problemy z nimi związane mogą być rozmaite, często jednak sprytnym sposobem, który łatwo wiedzie do rozwiązania, jest nietypowe kolorowanie pól szachownicy. Może ono pomóc w lepszej redakcji rozwiązania, ale często po prostu je umożliwia, gdyż inne metody byłyby bardzo skomplikowane. Wybór sposobu kolorowania szachownicy związany jest z odnalezieniem pewnego niezmiennika, czyli cechy, która nie zmienia się podczas wykonywania opisanych w zadaniu operacji.

Zadanie 1

Dana jest szachownica 4×4 wypełniona znakami „+” i „-” jak na rysunku. Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne w dowolnej linii pionowej, poziomej i ukośnej. Czy wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę z samymi plusami?

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Rozwiązanie

Wystarczy pokolorować szachownicę jak na rysunku i zauważyć, że liczba minusów na ciemnych polach pozostaje zawsze nieparzysta. (Dlaczego?) W szczególności nie może być równa zero.

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Zadanie 2

Dana jest szachownica 6×6 wypełniona znakami „+” i „-” jak na rysunku. Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne w dowolnej linii pionowej, poziomej i ukośnej. Czy wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę z samymi plusami?

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	-	-	+	+

Podpowieź

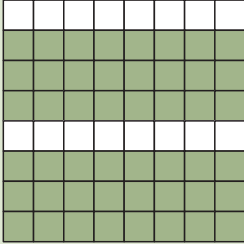
Pokoloruj np. 10 pól w tym 3 ze znakiem „-”.

Zadanie 3

Na każdym polu szachownicy 8×8 napisano liczbę całkowitą. Dozwolone są następujące operacje:

- wszystkie liczby zawarte w pewnym kwadracie 3×3 zwiększamy o 1,
- wszystkie liczby zawarte w kwadracie 4×4 zwiększamy o 1.

Czy zawsze (tzn. niezależnie od tego, jakie były wyjściowe liczby) wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę wypełnioną wielokrotnościami trójki?



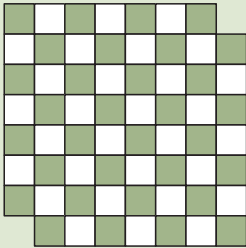
Rozwiązanie

Pokolorujemy szachownicę jak na rysunku. Zauważmy, że po wykonaniu dowolnej operacji reszta z dzielenia przez 3 sumy liczb znajdujących się na ciemnych polach nie zmienia się, bo:

– jeśli wykonujemy pierwszą operację, to suma ta zawsze wzrasta o sześć lub dziewięć, zatem reszta z dzielenia przez 3 nie zmienia się,

– jeśli wykonujemy drugą operację, to suma wzrasta zawsze o 12 i znów reszta z dzielenia przez 3 się nie zmienia.

Wystarczy więc na początku wpisać w ciemne pola takie liczby, których suma nie jest podzielna przez 3. Wtedy nigdy nie da się wypełnić szachownicy wielokrotnościami trójki, bo ich suma jest podzielna przez 3, a to jest niemożliwe.



Zadanie 4

Mamy szachownicę z wyciętymi dwoma przeciwległymi rogami. Czy da się ją pokryć płytkami o wymiarach 1×2 pola?

Rozwiązanie

Płytką w dowolnym położeniu pokrywa jedno pole białe i jedno czarne. Przeciwległe narożniki są tego samego koloru, więc po ich usunięciu na szachownicy będzie więcej pół jednego koloru. Takie pokrycie nie jest zatem możliwe.

Zadanie 5

Czy szachownicę z wyciętym jednym rogiem można pokryć płytkami o wymiarach 1×3 pola?

Podpowiedź

Pokoloruj szachownicę trzema kolorami jak na rysunku.

Metodę kolorowania można też wykorzystać w zadaniach o grach. Często warto pokolorować „pola wygrywające” (por. MMM 1/2003 *Gry w matematyce rekreacyjnej 2*), co pozwala na łatwiejsze znalezienie strategii wygrywającej któregoś z graczy.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

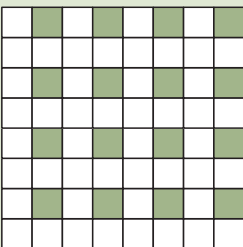


Zadanie 7

Na szachownicy 8×8 w lewym dolnym rogu stoi pionek. Dwóch graczy może go przesuwać na zmianę o jedno pole, w jednym z podanych na rysunku kierunków. Wygrywa ten, kto pierwszy umieści pionek w prawym górnym rogu. Jak powinien grać rozpoczynający, aby wygrać?

Rozwiązanie

Na rysunku zaznaczono pola wygrywające: jeśli gracz rozpoczynający przejdzie w pierwszym ruchu na pole ciemne, wtedy jego przeciwnik musi wejść na pole jasne. W dalszej części rozgrywki gracz rozpoczynający powinien poruszać się zawsze po polach ciemnych.



Zadania do samodzielnego rozwiązania

Odpowiedzi
wewnątrz
numeru.

Zadanie 1

Dana jest szachownica o wymiarach 4×4 wypełniona 15 znakami „+” i jednym znakiem „-”. Dozwolone są zamiany na przeciwne wszystkich znaków znajdujących się w wierszu, w kolumnie lub na przekątnej (nie dowolnej linii ukośnej). Czy istnieje takie miejsce, że jeśli w nim na początku znajduje się „-”, to wykonując pewną liczbę dozwolonych operacji da się otrzymać szachownicę z samymi „+”?

Zadanie 2

Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma płytkami o wymiarach 4×1 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte?

Zadanie 3

Andzia i Bob narysowali na asfaltowym boisku pas, który podzielili na 25 pól, tak że na jednym polu może stać jedna osoba. Grają w grę polegającą na tym, że na zmianę stają na polach, posuwając się ku drugiemu końcowi pasa. Zawodnik musi w każdym ruchu wyprzedzić przeciwnika, jednak nie może stać dalej niż o trzy pola od niego. Rozpoczynający może stać na jednym z trzech pól początkowych, a zwycięży ten, kto pierwszy zajmie ostatnie pole. Czy Andzia, która rozpoczyna grę, ma strategię wygrywającą, czyli taki sposób gry, że wygra bez względu na to, jakie ruchy będzie wykonywał Bob?

Lech Stawikowski

LITERATURA

1. Daniar Ch. Musztari, *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna ADAM, Warszawa.
2. *Limias „Delta”* nr 3/2003 i 5/2003.
3. *Zadania „Delta”* nr 1/1999, 9/2000, 12/2000.
4. Piotr Hajłasz *Wielomino „Delta”* nr 2/1994.

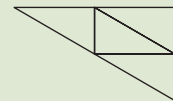
Odpowiedź na pytanie z artykułu *Osiółek na pastwisku* ze strony 11

Oto siatki:

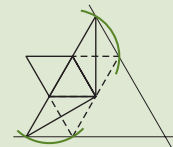
- a) czworokątnianu równościennego, który nie jest foremny (rys. 1),
- b) czworokątnianu równopolewego, który nie jest równościenny (rys. 2).

Niestety oba te modele sklejają się „na płasko”.

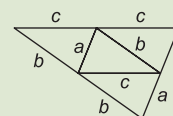
Czworokątnian równopolewy musi być równościenny, ale nie musi być foremny. Oto (rys. 3) poprawiona siatka takiej bryły.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3